## Тема 1.4. Численное интегрирование

1.4.1. Постановка задачи

1.4.2. Метод прямоугольников

1.4.3. Формула трапеций

1.4.4. Формула Симпсона

1.4.5. Оценка погрешности численного интегрирования

1.4.6. Тестовые задания по теме «Численное интегрирование»

### **1.4.1. Постановка задачи**

Из курса математического анализа известно, что, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b] и дифференцируема, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b существует и может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:



Если первообразную функцию F(x) не удается выразить аналитически через элементарные функции или если при проведении практических расчетов подынтегральная функция f(x) задается в виде таблицы, то это приводит к необходимости замены аналитического интегрирования численными методами.

Для функции f(x), заданной в прямоугольной системе координат на интервале [a;b], этот интеграл численно равен площади, ограниченной кривой f(x), осью Ox и двумя ординатами ac и bd.

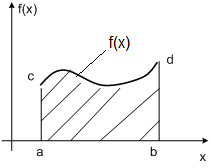


Рис. 1.4.1-1

Задача численного интегрирования заключается в нахождении значения определенного интеграла через ряд значений подынтегральной функции yi=f(xi), заданной в точках xi (i=0,1,…,n)**.** Причем, x0 = a, xn = b. Чаще всего интервал разбивают на подынтервалы длинойh = xi+1 - xi.

Применительно к однократному интегралу, формулы численного интегрирования представляют собой **квадратурные формулы** вида:



гдеAi – числовые коэффициенты, называемые **весами квадратурной формулы**, аxi – точки из отрезка - **узлами квадратурной формулы**, n > 0 – целое число.

Искомый определенный интеграл можно представить в виде суммы интегралов:



На каждом **i**-м отрезке функция аппроксимируется (заменяется) некоторой другой легко интегрируемой функцией gi(x). В результате получаем следующую квадратурную формулу:

.

Для решения поставленной задачи подынтегральную функцию f(x) необходимо заменить приближенной функцией, которая может быть проинтегрирована в аналитическим виде. В качестве такой функции обычно используют полином Р(х) с узлами интерполяции в точках х0, х1, х2, …,хn. В этих точках значения функции и интерполяционного полинома полностью совпадают f(xi) = Р(xi)**.**

Для получения простых формул интегрирования используют полиномы нулевой, первой и второй степени и соответственно получают формулы численного интегрирования: **прямоугольников, трапеций** и **Симпсона**.

Очевидно, что замена функции f(x) интерполирующим полиномом приводит к образованию погрешности вычисления значения интеграла



где I1 – точное значение интеграла, I – значение интеграла, вычисленного численным методом, а – погрешность метода.

Отметим, что увеличение числа подынтервалов n (или уменьшение длины шага интегрирования h) ведет к уменьшению погрешности.

### **1.4.2. Метод прямоугольников**

Заменим подынтегральную функцию f(x) в пределах элементарного отрезка [xi;xi+1] интерполяционным многочленом нулевой степени (рис.1.4.2-1), то есть постоянной величиной, равной либо f(xi), либо f(xi+1).



Рис. 1.4.2-1

Значение элементарного интеграла равно площади прямоугольника, в первом случае   
I = h∙f(xi), а во втором I = h∙f(xi+1**),** где h = xi+1 - xi. Для определения значения интеграла на отрезке [a;b] найдем суммы элементарных интегралов, взяв в первом случае в качестве  
 f(x) – значение подынтегральной функции в левом конце i-го отрезка, а во втором – в правом конце отрезка:

 (1.4.2-1)  
  (1.4.2-2)

Формула (1.4.2-1) называется **формулой левых прямоугольников**, а формула   
(1.4.-2.2) – **формулой правых прямоугольников**.

Для вычисления определенного интеграла может быть использована и формула **средних прямоугольников** (1.4.2-3), в которой на элементарном отрезке интегрирования функция f(x)тоже заменяется интерполяционным многочленом нулевой степени, но равным значению функции в середине отрезка:

 (1.4.2-3)

Схема алгоритма метода средних прямоугольников приведена на рис. 1.4.2-2.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.4.2-2. Схема алгоритма интегрирования по методу средних прямоугольников с

использованием правила Рунге

### **1.4.3. Формула трапеций**

Разобьем интервал интегрирования [a;b] на **n** равных отрезков (рис. 1.4.3-1) и восстановим из полученных точек a, х1, x2, …, b перпендикуляры до пересечения с графиком функции. Соединив последовательно точки пересечения, представим площадь полученной криволинейной трапеции как сумму прямолинейных трапеций, площади которых легко подсчитать. Заменив подынтегральную функцию f(x) в пределах элементарного отрезка **[xi;xi+1]** интерполяционным многочленом первой степени, получим следующие формулы для элементарных площадей:



Рис. 1.4.3-1



Тогда общая площадь равна: 

Отсюда получаем формулу трапеций:

 (1.4.3-1)

Схема алгоритма метода трапеций приведена на рис. 1.4.3-2.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.4.3-2. Схема алгоритма интегрирования по методу трапеции с использованием

правила Рунге

### **1.4.4. Формула Симпсона**

Для получения формулы Симпсона применяется квадратичный интерполирующий полином, следовательно, за элементарный интервал интегрирования принимается отрезок [xi;xi+2]. Поэтому разобьем интервал интегрирования [a;b] наn отрезков, где n=2m – четное число (рис. 1.4.4-1).



Рис. 1.4.4-1

Для получения интерполирующей функции на интервале [xi;xi+2] воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона, используя в качестве узлов интерполяции точки xi, хi+1 и xi+2.

 (1.4.4-1)

В пределах отрезка [xi;xi+2], на котором подынтегральная функция аппроксимирована многочленом (1.4.4-1), получим приближенную формулу Симпсона:

 (1.4.4-2)

Для отрезка [x0;x2]

Для отрезка [x2;x4]

Тогда для всего интервала интегрирования [a;b] формула Симпсона выглядит следующим образом:



или

 (1.4.4-3)

при 

Схема алгоритма метода Симпсона приведена на рис. 1.4.4-2.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.4.4-2. Схема алгоритма интегрирования по методу Симпсона с использованием

правила Рунге

### **1.4.5. Оценка погрешности численного интегрирования**

Замена подынтегральной функции интерполяционным полиномом приводит к погрешности вычисления его значения R=|I1 – I|, где



Очевидно, что вычислить эту погрешность можно только, если известно точное значение интеграла. Поэтому на практике принято проводить оценку погрешности численного интегрирования следующим образом (подынтегральная функция задана таблично (Т) или аналитически (А)):

* при использовании **формул левых или правых прямоугольников**



* при использовании **формулы средних прямоугольников**



* при использовании **формулы трапеций**



* при численном интегрировании **по формуле Симпсона**:



В приведенных выше формулах: a, b **–** границы интервала интегрирования; h=(b-a)/n **–** шаг интегрирования**; . ** и  – среднее арифметическое, соответственно, первых, вторых и четвертых конечных разностей.

Поскольку в формуле погрешности для метода трапеций присутствует вторая производная, а в формуле Симпсона – четвертая, то формула трапеций точна только для линейных функций, а формула Симпсона для линейных, квадратичных и кубических.

Из приведенных формул видно, что уменьшение шага интегрирования (h) приводит к уменьшению погрешности. При этом, поскольку квадратичная интерполяция представляет функцию с большей точностью, чем линейная, то при использовании формулы Симпсона требуемая точность достигается при меньших значениях n(количестве разбиений), чем, например, при использовании формулы трапеций и формулы прямоугольников.

Формулы для оценки погрешности могут быть также использованы для выбора числа разбиений n или шага интегрирования h, необходимых для обеспечения заданной точности. Однако практическое использование этих формул ограничено в связи с трудоемкостью их вычислений, поэтому при реализации численных методов на **ПК** используется прием, позволяющий получить оценку погрешности в неявном виде. Этот прием основан на двукратном вычислении значения интеграла вначале с шагом h(где h=(b-a)/n), а затем с шагом h/2. Полученные значения интегралов Ih и Ih/2 могут быть применены для оценки погрешности интегрирования по формуле:

 (1.4.5-1)

где: k=1 – для формул левых и правых прямоугольников;

k=2 – для формул трапеции и средних прямоугольников;

k=4 – для формулы Симпсона.

Если полученная погрешность не удовлетворяет требуемой точности, то вычисляется значение интеграла при h=h/4 и снова оценивается погрешность, и т.д. до тех пор, пока не окажется, что погрешность стала меньше заданной точности. Это правило называется **правилом Рунге** (или правилом двойного просчета).

**Пример 1.4.5-1. Вычислить значение определенного интеграла **

Предположим, что, подынтегральная функция задана таблично:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **0.0** | **0.1** | **0.2** | **0.3** | **0.4** | **0.5** |
| **f(x)** | **1.0** | **0.99005** | **0.960789** | **0.913913** | **0.852144** | **0.778801** |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **0.6** | **0.7** | **0.8** | **0.9** | **1.0** |
| **0.697676** | **0.612626** | **0.527292** | **0.44858** | **0.367879** |

Используем формулы **правых**и**левых прямоугольников**, считая, что h = 0.2, а n=(b-a)/h=5, имеем:





Используем **формулу трапеций**:



Используем формулы **средних прямоугольников**:



Используем **формулу Симпсона** **при** m=2∙n=10(2∙5) и шаге h=0.1:



Произведем оценку погрешности каждого из полученных значений, используя известное аналитическое выражение подынтегральной функции f(x):



Следовательно,

Анализируя значения погрешностей, можно с уверенностью сказать, что самый точный результат получен с использованием формулы Симпсона.

### **1.4.6. Тестовые задания по теме «Численное интегрирование»**

1. **Численное значение интеграла  равно**
   1. площади, ограниченной кривой f(x), осью 0x и двумя ординатами в точках a и b
   2. площади прямоугольника
   3. площади прямоугольной трапеции
   4. в списке нет правильного ответа
2. **Шаг интегрирования - это**
   1. расстояние между узлами интерполяции
   2. расстояние между значениями аргументов
   3. разность между значениями 
   4. в списке нет правильного ответа
3. **Шаг равномерной сетки изменения х на отрезке [a;b] вычисляется по формуле (n – число узлов)**
   1. 
   2. 
   3. 
4. **При решении задачи численного интегрирования интерполяция используется** 
   1. на этапе вычисления элементарного интеграла
   2. при вычислении конечных разностей
   3. при вычислении шага интегрирования
   4. в списке нет правильного ответа
5. **Погрешность интегрирования при уменьшении числа разбиений** 
   1. уменьшится
   2. увеличится
   3. останется без изменений
   4. в списке нет правильного ответа
6. **В методе прямоугольников подынтегральная функция заменяется интерполяционным многочленом** 
   1. 1-й степени
   2. 2-й степени
   3. 0-й степени
   4. в списке нет правильного ответа
7. **В методе трапеций подынтегральная функция заменяется интерполяционным многочленом** 
   1. 1-й степени
   2. 2-й степени
   3. 3-й степени
8. **Метод численного интегрирования, в котором подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, называется**
   1. методом трапеций
   2. методом прямоугольников
   3. методом Симпсона
   4. методом Гаусса
9. **Количество интервалов разбиения, кратное двум, необходимо выбирать для вычисления интеграла**
   1. методом трапеций
   2. методом левых прямоугольников
   3. методом Симпсона
   4. методом средних прямоугольников
10. **Меньшее количество интервалов разбиения при вычислении интеграла с заданной точностью потребуется для**
    1. метода трапеций
    2. метода правых прямоугольников
    3. метода средних прямоугольников
    4. метода Симпсона
11. **Обеспечить вычисление интеграла с заданной точностью можно, используя**
    1. метод двойного просчета
    2. метод автоматического выбора шага
    3. метод Рунге-Кутта
    4. метод Симпсона
12. **Элементарный отрезок интегрирования в методе Симпсона равен**
    1. одному шагу интегрирования
    2. двум шагам интегрирования
    3. трем шагам интегрирования
    4. четырем шагам интегрирования
13. **В методе Симпсона количество интервалов разбиения должно быть**
14. не менее пяти
15. кратным трем
16. кратным двум
17. кратным четырем
18. **В формуле правила Рунге  значение коэффициента k в методах Симпсона, левых и правых прямоугольников и трапеций, равны соответственно**
19. 3, 1, 2
20. 1, 2, 3
21. 2, 3, 1
22. 4, 1 , 2
23. **Пара методов, обеспечивающих точность одного порядка это**
    1. метод трапеций и метод средних прямоугольников
    2. метод правых прямоугольников и метод Симпсона
    3. метод левых прямоугольников и метод трапеций
24. **Значение интеграла, вычисленное с использованием формулы трапеции, для функции, заданной таблично, равно**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| y(x) | -4 | -3.8 | 0 | 2 |

* 1. 0.48
  2. -0.48
  3. 0.83
  4. 0.38

1. **Значение интеграла для функции, заданной таблично, вычисленное методом Симпсона, равно**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y(x) | 1 | 4 | 10 | 13 | 16 |

1. 2.7
2. -2.7
3. 35
4. 0.55
5. **Значение интеграла  , вычисленное по формуле правых прямоугольников, если подынтегральная функция задана таблицей, равно**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| y(x) | 4 | 5.5 | 4.5 | 3.5 | 3 |

* 1. 2.75
  2. 1.95
  3. 2.05
  4. 1.65

1. **Значение интеграла , вычисленное по формуле левых прямоугольников, если подынтегральная функция задана таблицей, равно**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| y(x) | 3 | 5 | 4 | 3.5 | 3 |

1. 1.55
2. 1.95
3. 2.5
4. 2.05
5. **Значение интеграла вычисленное с использованием формулы Симпсона от функции  на отрезке [1; 5] с шагом h=2, равно**
6. 70.667
7. 8.066
8. 55.667
9. 7.067
10. **Оценка погрешности значения интеграла, вычисленная по методу средних прямоугольников с h=4 и h=2, по правилу Рунге составляет**
11. 2.86
12. 5.333
13. 0.86
14. 1.6
15. **Оценка погрешности значения интеграла , вычисленная по методу трапеций с h=2 и h=1, по правилу Рунге составляет**
16. 9.48
17. 11.221
18. 0.809
19. 0.125
20. **Погрешность значения интеграла, вычисленная по методу правых прямоугольников с h=0.2 и h=0.1, если подынтегральная функция функции задана таблицей, по правилу Рунге составляет**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
| ƒ(х) | -0.8 | -0.3 | 0.01 |

1. 0.31
2. 1
3. 0.03
4. 0.13
5. **Погрешность при вычислении определенного интеграла по формуле средних прямоугольников с шагом h=3 составляет**
6. 0.45
7. 44.5
8. 4.5
9. 0.001
10. **Оценка погрешности значения интеграла, вычисленная по методу левых прямоугольников с h=0.2 и h=0.1, по правилу Рунге составляет**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| ƒ(х) | -2.5 | -2 | 0.5 | 1 | 1.5 |

1. 0.145
2. 1.445
3. 1.151
4. -0.1
5. **Значение интеграла, вычисленное от функции, заданной таблично, методом трапеций, равно**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0.1 | 0.2 | 0,4 | 0.5 | 0.6 |
| ƒ(х) | -0.8 | -0.2 | 0.5 | 0.55 | 1 |

1. 1.095
2. 2.95
3. 0.999
4. 0.095
5. **Значение интеграла, вычисленное от функции, заданной таблично, методом трапеций с шагом h=1 (для вычисления значения функции в точке 3 использовать линейную интерполяцию), равно**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 4 |
| ƒ(х) | -1 | 2 | 4 |

1. 6.5
2. 0.65
3. 13.0
4. 10.55
5. **Значение интеграла, вычисленное методом Симпсона от функции, заданной таблично (для вычисления значения функции в точке 3 использовать линейную интерполяцию), равно**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 2 | 4 |
| ƒ(х) | 3 | 2 |

1. 1.333
2. 5
3. 15.663
4. 0.333
5. **Значение интеграла, вычисленное от функции, заданной таблично, методом трапеций (для вычисления значения функции в точке 3 использовать линейную интерполяцию), равно**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 2 | 4 | 5 |
| ƒ(х) | 8 | 5 | 4 |

1. 1.85
2. 25.8
3. 17.5
4. 20.55
5. **Погрешность, полученная при вычислении интеграла с шагом h=2, методом правых прямоугольников, равна**
6. 13.3
7. 176.23
8. 100..333
9. 133.333